รายงานการวิจัย

1. ความสำคัญของปัญหา

เสื้อผ้าโดยทั่วไปเมื่อใช้ไปนาน ๆ ด้านหลังมักจะสึกหรอไปมากในขณะที่ด้านหน้าเกือบไม่สึกเลย ทั้งนี้เป็นเพราะการออกแบบตัดเย็บได้กำหนดไว้ตายตัวว่าให้สวมด้านใดไว้ข้างหน้า ด้านใดไว้ข้างหลังทุกครั้งไป

ถ้าเรานึกถึงกฎการสลับที่ (commutative law) ในวิชาคณิตศาสตร์ นำความคิดนี้มาออกแบบตัดเย็บเสื้อผ้าให้มีลักษณะ commutative คือให้ด้านหน้าและด้านหลังเหมือนกัน จนสามารถสวมสลับหน้าหลังกันได้ ก็จะยืดอายุการใช้งานออกไปได้ เพราะการสวมใส่แต่ละครั้งจะมีลักษณะสุ่ม (random) การสึกหรอก็จะเฉลี่ยไปทั้งสองด้าน

2. วัตถุประสงค์

เพื่อหาสูตรและวิธีที่จะหาค่าคาดหมาย (estimate) อายุการใช้งานของเสื้อผ้าที่ตัดเย็บตามแบบดังกล่าวโดยกำหนดความคงทนของเนื้อผ้าให้ ทั้งนี้ภายใต้สมมติฐานว่าด้านหน้าสึกช้ากว่าด้านหลัง แล้วกำหนดสมมติตัวเลขขึ้นหลาย ๆ จำนวน เพื่อทำการคำนวณเปรียบเทียบกันว่า อายุการใช้งานจะเพิ่มขึ้นเพียงใด และในลักษณะใด

3. วิธีการทำวิจัย

3.1 กำหนดความคงทนของเนื้อผ้า

3.1.1 สมมติว่าผ้าชนิดหนึ่งเมื่อตัดเย็บ (แบบธรรมดา) แล้วใช้งานได้ B ครั้ง เราก็จะกำหนดว่าเนื้อผ้าชนิดนี้ทนต่อการใช้งานเมื่ออยู่ด้านหลังของผู้สวมได้ B ครั้ง หรือการใช้งานทำให้สึกหรอไปครั้งละ $1/B$

3.1.2 กำหนดว่าผ้าชนิดเดียวกันนี้เมื่อกำหนดให้อยู่ทางด้านหน้าของผู้สวมจะสึกหรอช้ากว่าอยู่ทางด้านหลัง k เท่า $(k>1)$ หรือการใช้งานทำให้สึกหรอไปครั้งละ $1/kB$

3.2 <u>การหาอายุการใช้งาน</u>

เพื่อป้องกันการสับสนเนื่องจากความเหมือนกัน เรากำหนดชื่อด้านหนึ่งเป็น "แดง" และอีกด้านหนึ่งเป็น "เขียว"

ให้อายุการใช้งานเป็น	n	ครั้ง
โดยด้านแดงอยู่ข้างหลัง (เขียวอยู่ข้างหน้า)	x	ครั้ง
และด้านแดงอยู่ข้างหน้า (เขียวอยู่ข้างหลัง)	y	ครั้ง

ดังนั้น

$$x + y = n \qquad \ldots . (1)$$

ถ้าให้ความสึกหรอทางด้านแดง = R จะได้ว่า

$$R = \frac{x}{B} + \frac{y}{kB} \leq 1 \qquad \ldots . (2)$$

และถ้าให้ความสึกหรอทางด้านเขียว = G ก็จะได้ว่า

$$G = \frac{y}{B} + \frac{x}{kB} \leq 1 \qquad \ldots . (3)$$

ยกตัวอย่าง เช่น

ให้ $B = 100$

$k = 4$

$n = 145$

$x = 85$

จะได้ (จาก (1)) ว่า

$y = 60$

ดังนั้น $R = \frac{85}{100} + \frac{60}{400} = 1$

ซึ่งก็สอดคล้องอสมการ (2)

และ $G = \frac{60}{100} + \frac{85}{400} = 0.8125 < 1$

ซึ่งก็สอดคล้องอสมการ (3)

ในการคิดคำนวณต่อ ๆ ไป ค่า n, x และ y จะต้องสอดคล้องสมการและอสมการทั้งสามนี้เสมอ

ถ้าเราตรึง (fix) ค่าของ n ให้อยู่ที่ 145 แล้วให้ x และ y เปลี่ยนค่าไป จะได้

	x	y	R
x ลดลง	84	61	0.9925
	83	62	0.9850
	80	65	0.9625
x เพิ่มขึ้น	86	59	1.0075
	87	58	1.0150

จะเห็นว่าค่าที่สอดคล้อง (2) ($R \leq 1$) เมื่อ $n = 145$ นั้น

ค่าสูงสุดของ x คือ 85

ค่าต่ำสุดของ y คือ 60

ทำนองเดียวกันค่าที่สอดคล้อง (3) ($G \leq 1$) เมื่อ $n = 145$ นั้น

ค่าสูงสุดของ y คือ 85

ค่าต่ำสุดของ x คือ 60

สรุป เมื่อ $n = 145$ จะต้องได้ว่า

$$60 \leq x \leq 85$$

ค่า n, x และ y จึงจะสอดคล้อง (1), (2) และ (3) (ค่าต่ำสุดของ x ก็คือผลต่างระหว่าง n กับค่าสูงสุดของ x)

การสวมเสื้อผ้า (ซึ่งสองด้านเหมือนกัน) แต่ละครั้ง ความน่าจะเป็นที่จะได้ "แดง" อยู่ข้างหลังจะเท่ากับ 0.5 ดังนั้น x ในสมการ (1) ก็จะเป็นตัวแปรสุ่ม (random variable) ที่มีการแจกแจงทวินาม (binomial distribution) ซึ่งมี parameter เป็น n กับ p และในที่นี้ $p = 0.5$

ดังนั้น ถ้า a เป็นจำนวนเต็มซึ่ง $0 \leq a \leq n$ ก็จะได้ว่า ความน่าจะเป็นที่ x จะเท่ากับ a หรือ $P(x=a)$ จะมีค่าเป็น $\binom{n}{a} p^{a}(1-p)^{n-a}$

และถ้า b เป็นจำนวนเต็ม ซึ่ง $a \leq b \leq n$ ก็จะได้ว่า ความน่าจะเป็นที่ $a \leq x \leq b$ หรือ $P(a \leq x \leq b)$ จะมีค่าเป็น

$$\sum_{j=a}^{b} \binom{n}{j} p^{j} (1-p)^{n-j}$$

สำหรับกรณีของเรา $p = 0.5$ ดังนั้น

$$P(a \le x \le b) = \sum_{j=a}^{b} \binom{n}{j} (0.5)^{n} \quad .... (4)$$

และสำหรับตัวอย่างที่กล่าวมาแล้ว ซึ่ง $n = 145$ ก็จะได้ว่า

$$P(60 \le x \le 85) = \sum_{j=60}^{85} \binom{145}{j} (0.5)^{145}$$

ค่า $P(60 \le x \le 85)$ นี้ เมื่อคำนวณออกมาจะได้ค่าที่มากกว่า 0.95 นั่นคือ ถ้าความคงทนของเนื้อผ้าเป็น

$B = 100$ และ $k = 4$ แล้ว

เสื้อผ้าซึ่งตัดเย็บแบบหน้าหลังเหมือนกันจะมีอายุการใช้งานถึง 145 ครั้ง ในระดับความเชื่อมั่นที่สูงกว่า 95%

จากตัวอย่างจะเห็นว่า ถ้ากำหนดค่าของ B, k, n และค่าสูงสุดของ x มาให้ เราก็สามารถหาระดับความเชื่อมั่น (ความน่าจะเป็น) ได้ ในการทำวิจัยนี้ วัตถุประสงค์อยู่ที่การหาค่าของ n ดังนั้น ต่อไปนี้เราจะสร้างสูตรและหาวิธีที่จะคำนวณหาค่า n (พร้อมทั้งค่าสูงสุดของ x) เมื่อกำหนดค่าของ B, k และระดับความเชื่อมั่นมาให้

จากเอกสารอ้างอิง [1]

ค่า $P(a \le x \le b)$ หรือ $\sum_{j=a}^{b} \binom{n}{j} p^{j} (1-p)^{n-j}$

นั้น สามารถประมาณได้ด้วยพื้นที่ใต้เส้นโค้งปกติมาตรฐาน

$$\Phi\left(\frac{b-np+0.5}{\sqrt{np(1-p)}}\right) - \Phi\left(\frac{a-np-0.5}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$$

โดย

$$\phi(z) = 1/\sqrt{2\pi}\int_{-\infty}^{z} e^{-t^2/2}\,dt$$

จากเอกสารอ้างอิง [2]

เมื่อ x เป็นตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงทวินาม พร้อมด้วย parameter n และ p นั้น

ถ้าให้ $$z = \frac{x - np}{\sqrt{np(1-p)}}$$

และ n --> ∞ ก็จะได้ว่า

z เป็นตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงปกติมาตรฐาน (standard normal distribution)

ที่กล่าวนี้เป็นเรื่องทางทฤษฎี ส่วนในทางปฏิบัตินั้นเราต้องดัดแปลงเล็กน้อย เนื่องจาก x เป็นตัวแปรเต็มหน่วย (discrete variable) แต่ z เป็นตัวแปรต่อเนื่อง ดังนั้นเราใช้

$$z = \frac{x+0.5-np}{\sqrt{np(1-p)}}$$

ซึ่งเมื่อแทนค่า p ด้วย 0.5 ก็จะได้ว่า

$$z = \frac{2x+1-n}{\sqrt{n}} \qquad \ldots\ldots(5)$$

นำสมการ (1) และอสมการ (2) มาคิดร่วมด้วย เรามี

$$x + y = n \qquad \ldots\ldots(1)$$

และ $$\frac{x}{B} + \frac{y}{kB} \le 1 \qquad \ldots\ldots(2)$$

กำจัด x และ y ออกไปจะได้

$$(k+1)n + z(k-1)\sqrt{n} - (2kb+k-1) \leq 0 \quad ....(6)$$

ทางซ้ายของ (6) เป็นฟังก์ชันกำลังสองโดยมี $\sqrt{n}$ เป็นตัวแปร

โดยสูตรการแก้อสมการ ถ้าเรามี

$$fx^2 + gx + h \leq 0$$

โดยที่ $f>0$ และ $g>0$ จะได้ว่า

$$\frac{-g - \sqrt{g^2-4fh}}{2f} \leq x \leq \frac{-g + \sqrt{g^2-4fh}}{2f}$$

ดังนั้น จาก (6) เราจะได้

$$\sqrt{n} \leq \frac{-z(k-1) + \sqrt{z^2(k-1)^2 + 4(k+1)(2kB+k-1)}}{2(k+1)}$$

ดังนั้น ถ้าให้

$$F = \frac{-z(k-1) + \sqrt{z^2(k-1)^2 + 4(k+1)(2kB+k-1)}}{2(k+1)}$$

ก็จะได้ว่า

$$n \leq F^2 \quad .....(7)$$

และจาก (1) และ (2) จะได้ว่า

$$x \leq \frac{kB - n}{k-1} \quad .....(8)$$

ซึ่งถ้า b เป็นค่าสูงสุดของ x จะได้ว่า

$$\frac{kB-n}{k-1} - 1 < b \leq \frac{kB-n1}{k-1}$$

สรุปแล้วเรามีสูตร (ใช้หมายเลขเดิม) ดังนี้

$$P(a \le x \le b) = \sum_{j=a}^{b} \binom{n}{j} (0.5)^n \quad \ldots\ldots (4)$$

$$z = \frac{2x+1-n}{\sqrt{n}} \quad \ldots\ldots (5)$$

$$n \le F^2 \quad \ldots\ldots (7)$$

โดย

$$F = \frac{-z(k-1) + \sqrt{z^2(k-1)^2 + 4(k+1)(2kB+k-1)}}{2(k+1)}$$

และ

$$x \le \frac{kB - n}{k-1} \quad \ldots\ldots (8)$$

ค่าของ z ที่จะแทนในสูตรที่จะหาค่า F นั้น ขึ้นอยู่กับระดับความเชื่อมั่น ดังนี้

ระดับความเชื่อมั่น	ค่า z
95%	1.96
99%	2.576
99.98%	3.72

<u>การใช้สูตรในการหาค่า n</u>

เมื่อกำหนดค่าของ B, k และ z มาให้ เราจะต้องหา F^2 ก่อน

<u>ตัวอย่างที่ 1</u> เช่น ถ้า B = 100, k = 3, z = 1.96 จะได้

$$F^2 = 138.9481265$$

และได้ $n \le 138$ (เนื่องจาก n เป็นจำนวนเต็ม) แทนค่า n, B, k ใน (8) ได้

$$x \le 81$$

ขั้นต่อไปตรวจสอบดูว่า $n = 138$ จริงหรือไม่ โดยแทน n และ x ด้วย 138 และ 81 (ตามลำดับ) ใน (5) เพื่อจะดูว่า $z \geq 1.96$ หรือไม่ ถ้า $z \geq 1.96$ ก็สรุปได้ว่า $n = 138$ ถ้า $z < 1.96$ ก็ต้องลดค่า n ลง แล้วตรวจสอบใหม่

สำหรับตัวอย่างนี้ $z = 2.128$ (คิดทศนิยม 3 ตำแหน่ง)

ดังนั้น สรุปได้ว่า ถ้า $B = 100$ และ $k = 3$ แล้ว จะได้ว่า $n = 138$ ด้วยระดับความเชื่อมั่นไม่ต่ำกว่า 95%

<u>ตัวอย่างที่ 2</u> ให้ $B = 100, k = 8, z = 1.96$
ทำอย่างเดียวกันจะได้

$F^2 = 159.3140671$

ดังนั้น $n \leq 159$

และ $x \leq 91$

แทนค่าทั้งสองใน (5) จะได้

$z = 1.903...$

ซึ่งน้อยกว่า 1.96 นั่นคือเราต้องลดค่า n ลง

และเมื่อให้ $n = 158$ เราได้ $x \leq 91$

แทนค่า (ซึ่งแก้ไขแล้ว) ใน (5) จะได้

$z = 1.988...$

ซึ่งมากกว่า 1.96 ดังนั้น สรุปได้ว่า $n = 158$ (ด้วยระดับความเชื่อมั่นไม่ต่ำกว่า 95%)

<u>หมายเหตุ</u> วิธีหาค่า n แบบนี้อาจต้องลดค่า n ลงถึง 2 ครั้งก็ได้ เช่น ถ้าให้ $B = 860, k = 8, z = 1.96$ จะได้ว่า

$F^2 = 1471.194835$

ค่า n ที่ใช้ได้คือ 1469