บทที่ 3

ทฤษฎีที่เกี่ยวข้องทางพลศาสตร์

3.1 ทฤษฎีเบื้องต้น

พฤติกรรมทางพลศาสตร์ของโครงสร้างนั้นเป็นตัวบ่งบอกได้ถึงลักษณะการเคลื่อนที่ต่างๆ ของโครงสร้างที่เกิดจากการที่มีแรงมากระทำต่อโครงสร้าง โดยการสั่นไหวของโครงสร้างจะมีอยู่สองลักษณะคือ การสั่นไหวอย่างอิสระ (Free vibration) และการสั่นไหวแบบจากภายนอก (Force vibration) การสั่นไหวอย่างอิสระเป็นการเคลื่อนที่เกิดขึ้นต่อระบบโครงสร้างโดยปราศจากแรงมากระทำต่อโครงสร้าง ความถี่ของการสั่นไหวเรียกว่า “ความถี่ธรรมชาติ” (Natural frequency) ส่วนการสั่นไหวแบบบังคับเป็นการเคลื่อนที่อันเนื่องมากจากมีแรงภายนอกมากระทำต่อโครงสร้างทำให้โครงสร้างเกิดการเคลื่อน และโครงสร้างถูกแรงกระทำจากสภาพแวดล้อมที่กระทำอยู่โดยรอบกระทำตลอดเวลา หรือที่เรียกว่า (Ambient load) ซึ่งการวิเคราะห์การสั่นไหวของโครงสร้างสิ่งที่จำเป็นต้องการหาคือ ค่าพารามิเตอร์ต่างๆ ของโครงสร้าง ซึ่งประกอบด้วย ค่าความถี่ธรรมชาติ (Natural frequency) อัตราส่วนความหน่วง (Damping ratio) และรูปแบบการสั่นไหว (Mode shape) เป็นสำคัญ ในการวิเคราะห์โครงสร้างนั้นจำเป็นต้องรู้คุณสมบัติทางกายภายที่สำคัญทางพลศาสตร์ของโครงสร้างประกอบด้วย มวล (Mass, m) ความหน่วง (Damping, c) สติฟเนิต (Stiffness, k) และแรงจากภายนอก (External force, $p(t)$) เมื่อทำการพิจารณาความสัมพันธ์และสมดุลของระบบสามารถเขียนอยู่ในรูปสมการฟังก์ชันได้ดังสมการที่ 3.1 และแสดงความสัมพันธ์ของคุณสมบัติทางกายภาพ และแรงในสมดุลของระบบดังตารางที่ 3.1 โดยส่วนประกอบต่างๆ ของทางพลศาสตร์ของโครงสร้างจะมีความสัมพันธ์กับการสั่นไหวของโครงสร้างในรูปของฟังก์ชันกับ การเสียรูป $u(t)$ ความเร็ว $\dot{u}(t)$ ความเร่ง $\ddot{u}(t)$ และเวลา(t) จัดเป็นสมการการเคลื่อนที่ได้ว่า

$$f_I(t) + f_D(t) + f_S(t) = p(t) \tag{3.1}$$

ความแตกต่างของการพิจารณาการวิเคราะห์ แบ่งได้ 2 ลักษณะ คือ ลักษณะที่หนึ่งเป็นการวิเคราะห์การสั่นไหวตามทฤษฎี (Theoretical route to vibration analysis) ซึ่งสามารถกำหนดค่าคุณสมบัติทางกายภาพของโครงสร้างทั้ง มวล ความหน่วง และสติฟเนส ค่าดังกล่าวทำให้ทราบถึงพฤติกรรมของโครงสร้างด้วยการกำหนดรูปแบบการสั่นไหว (Modal mode) ในแต่ละรูปแบบจะ

ประกอบด้วย ความถี่ธรรมชาติ (Natural frequency) ที่สัมพันธ์กับอัตราความหน่วง (Modal damping) และรูปแบบการสั่นไหว (Mode shapes) ค่าดังกล่าวนี้จะนำไปหาผลการตอบสนองต่อโครงสร้างได้ ดังแสดงในภาพที่ 3.1 และ ลักษณะที่สองเป็นการวิเคราะห์การสั่นจากทดสอบ (Experimental route to vibration analysis) จะเป็นแนวทางตรงกันข้ามกับการวิเคราะห์จากทฤษฎี โดยทราบผลการตอบสนองของโครงสร้างแล้วจะทำการหาค่าคุณสมบัติทางพลศาสตร์ของโครงสร้าง ดังแสดงในภาพที่ 3.2

ตารางที่ 3.1

ความสัมพันธ์ของคุณสมบัติทางกายภาพ และแรงในสมดุลของระบบ

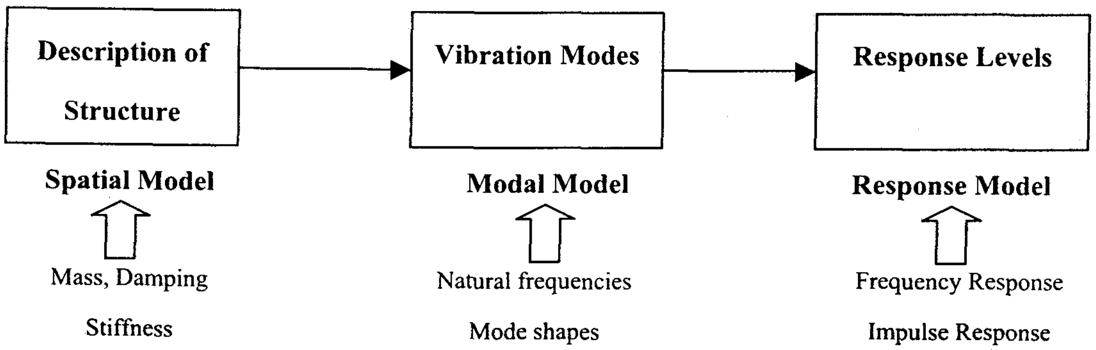
คุณสมบัติทางกายภาพ		แรงในสมดุลของระบบ	
มวล	m	แรงเฉื่อย	$-m\ddot{u}(t), f_I$
ความหน่วง	c	แรงหน่วง	$-c\dot{u}(t), f_D$
สติฟเนส	k	แรงยืดหยุ่น	$-ku(t), f_S$
แรงกระทำต่างๆ (Disturbance)		แรงกระทำภายนอก	$p(t)$

ซึ่ง f_I เป็นแรงเนื่องจากความเฉื่อย (Inertia force)

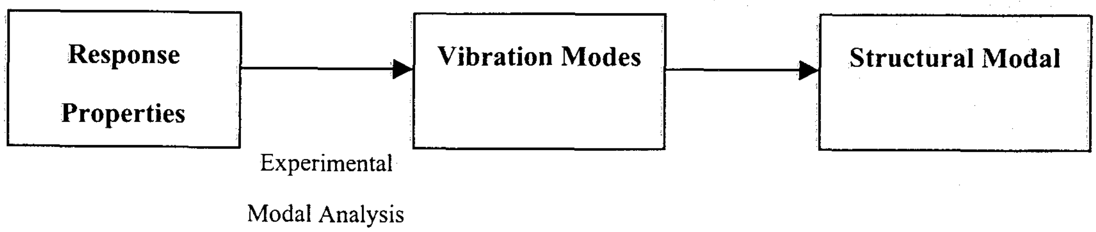
f_D เป็นแรงเนื่องจากความหน่วง (Damping force)

f_S เป็นแรงเนื่องจากความยืดหยุ่นของโครงสร้าง (Elastic force)

$p(t)$ เป็นแรงกระทำจากภายนอก



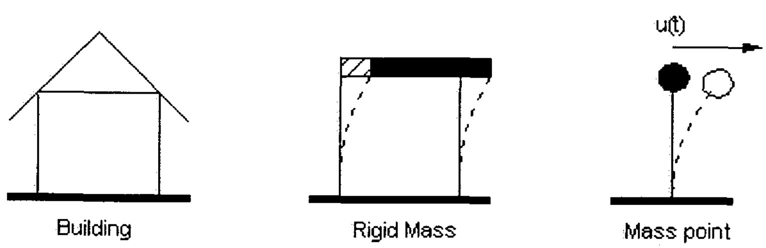
ภาพที่ 3.1 การวิเคราะห์การสั่นตามทฤษฎี



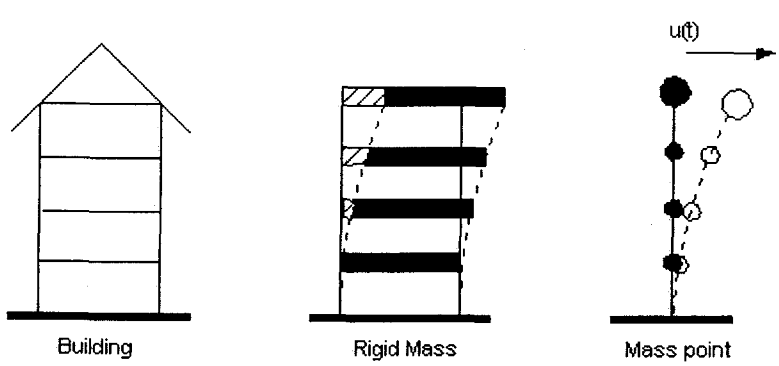
ภาพที่ 3.2 การวิเคราะห์การสั่นจากทดสอบ

3.1.1 ลักษณะของแบบจำลองโครงสร้าง

แบบจำลองโครงสร้างที่ใช้สำหรับการวิเคราะห์โครงสร้างนั้นจำเป็นต้องมีการพิจารณาดีกรีของความอิสระ (Degree of freedom, DOF) ซึ่งเป็นจำนวนพิกัดอิสระหรือการเสียรูปซึ่งอธิบายการเคลื่อนที่หรือตำแหน่งของโครงสร้างที่มีการเคลื่อนที่ได้ โดยพิกัดอิสระที่สามารถเคลื่อนที่ได้นี้ถ้าเป็นแบบง่ายหรือเคลื่อนที่ในทิศทางเดียวจะเรียกระบบนี้ว่า Single degree of freedom (SDOF) ดังแสดงในภาพที่ 3.3 และถ้าระบบของโครงสร้างมีดีกรีแห่งความอิสระมากกว่า 1 เรียกระบบนี้ว่า Multi-degree of freedom (MDOF) ดังแสดงในภาพที่ 3.4



ภาพที่ 3.3 ระบบ SDOF ของโครงสร้าง



ภาพที่ 3.4 ระบบ MDOF ของโครงสร้าง

3.1.2 ระบบดีกรีแห่งความอิสระเท่ากับหนึ่ง (Single degree of freedom)

ระบบ SDOF เป็นระบบโครงสร้างอย่างง่ายโดยทั่วไปสำหรับแบบจำลองในการวิเคราะห์คุณสมบัติทางพลศาสตร์ของโครงสร้าง พฤติกรรมการตอบสนองของโครงสร้างแยกได้ 2 กรณีคือ กรณีที่หนึ่งโครงสร้างไม่มีแรงภายนอกมากระทำหรือการสั่นไหวแบบอิสระ (Free vibration) ยังสามารถแบ่งลักษณะเป็นระบบแบบมีตัวหน่วงและไม่มีตัวหน่วงได้ และกรณีที่สองโครงสร้างมีแรงภายนอกมากระทำหรือการสั่นไหวแบบบังคับ (Force vibration)

3.1.3 การสั่นแบบอิสระ (Free Vibration)

โครงสร้างเมื่อถูกทำให้เคลื่อนที่หรือสั่นไหวโดยไม่มีแรงภายนอกมากระทำขณะเคลื่อนที่ เรียกการเคลื่อนที่นี้ว่า การสั่นแบบอิสระ โดยโครงสร้างจะสั่นด้วยระบบธรรมชาติของตัวเอง และค่าเริ่มต้นการเคลื่อนที่ ณ เวลาเริ่มต้น $t = 0$ ได้ค่าการขจัด $u(0)$ และความเร็วเริ่มต้น $\dot{u}(0)$ สามารถแสดงสมการการเคลื่อนที่เมื่อไม่มีแรงจากภายนอกมากระทำ ได้ว่า

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = 0 \tag{3.2}$$

ก. การสั่นแบบอิสระของระบบที่ไม่มีความหน่วง (Undamped free vibration)

การเคลื่อนที่แบบเชิงเส้นของระบบที่มีไม่มีแรงกระทำจากภายนอก $p(t) = 0$ ระบบมีการเคลื่อนที่แบบอิสระ และระบบที่พิจารณาเป็นระบบแบบอย่างง่าย คือ ระบบที่ไม่มีความหน่วง $c = 0$ จากสมการที่ 3.2 สามารถจัดรูปใหม่ได้ว่า

$$m\ddot{u} + ku = 0 \tag{3.3}$$

สมการเชิงอนุพันธ์ (3.3) สามารถหาคำตอบได้ เมื่อแทนค่าเริ่มต้นเมื่อเวลา $t = 0$ ดังนี้

$$u(t) = u(0)\cos\omega t + \frac{\dot{u}(0)}{\omega}\sin\omega t \tag{3.4}$$

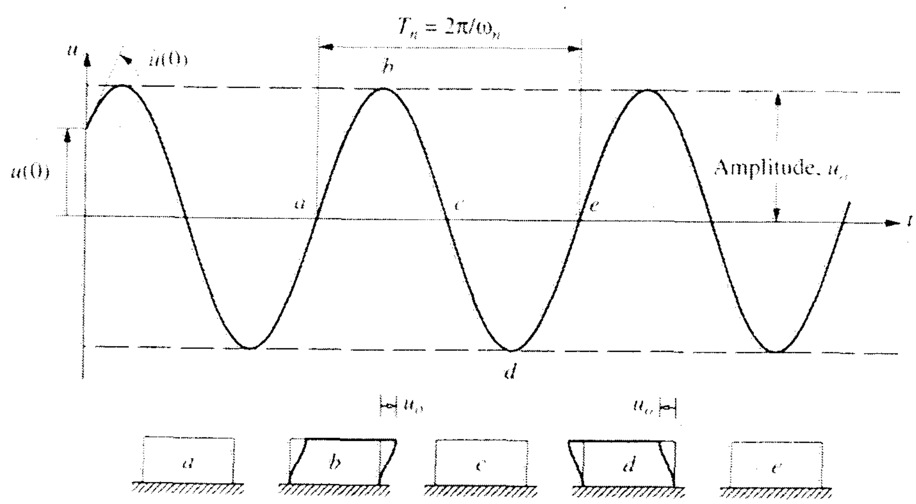
โดยที่

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{3.5}$$

เมื่อ ω เป็นความถี่ของการสั่นไหวธรรมชาติ มีหน่วยเป็น เรเดียนต่อวินาที

สมการที่ 3.4 เมื่อแสดงเป็นรูปกราฟของการขจัดที่เวลา t ใดๆ จะได้ดังภาพที่ 3.5 ซึ่งแสดงถึงการเคลื่อนที่กลับไปมารอบตำแหน่งสมดุลเชิงสถิตย์ (Static Equilibrium) ที่ $u(t) = 0$ โดยที่การเคลื่อนที่เป็นรอบๆ ด้วยลักษณะการเคลื่อนที่แบบฮาโมนิค (Simple harmonic motion) เช่นนี้ เวลาที่ใช้ในการเคลื่อนที่หนึ่งรอบเรียกว่าคาบ (Period) T มีหน่วยเป็นวินาที จากภาพที่ 3.5 ได้

$$T = \frac{2\pi}{\omega_n} \tag{3.6}$$



ภาพที่ 3.5 การสั่นแบบอิสระของระบบ SDOF ที่ไม่มีความหน่วง

ส่วนกลับของคาบธรรมชาติหรือจำนวนรอบในหนึ่งวินาทีของการสั่นแบบอิสระคือ ความถี่ธรรมชาติ (Natural Frequency, f) มีหน่วยเป็นเฮิรทซ์ (Hertz , Hz) หรือ รอบต่อวินาที (cycles per second, cps)

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \tag{3.7}$$

คุณสมบัติธรรมชาติของระบบ ω ,T และ f จะขึ้นอยู่กับมวล และ สติฟเนส ของระบบ สามารถพิจารณาได้ว่าระบบ 2 ระบบที่มีมวลขนาดเท่ากัน และมีค่าสติฟเนสมากหรือความแข็งแรงสูง จะมีค่าความถี่ธรรมชาติสูง และคาบธรรมชาติสั้น ในอีกด้านระบบ 2 ระบบที่มีความแตกต่างของมวลมากที่มีค่าสติฟเนสเท่ากัน จะมีค่าความถี่ธรรมชาติต่ำ และคาบธรรมชาติยาว

ข. การสั่นแบบอิสระของระบบที่มีความหน่วง (Damped free vibration)

การเคลื่อนที่แบบเชิงเส้นของระบบที่ไม่มีแรงจากภายนอกมากระทำ $p(t) = 0$ และพิจารณาระบบมีการเคลื่อนที่แบบอิสระที่มีความหน่วง, c จากสมการที่ 3.2 ทำการแก้สมการสำหรับ $u(t)$ ที่สถานะเริ่มต้น (Initial conditions)

$$u(0) = u_0 \, , \; \dot{u}(0) = \dot{u}_0 \tag{3.8}$$

สามารถจัดรูปสมการที่ 3.2 ใหม่ให้เป็นรูปสมการทั่วไปได้

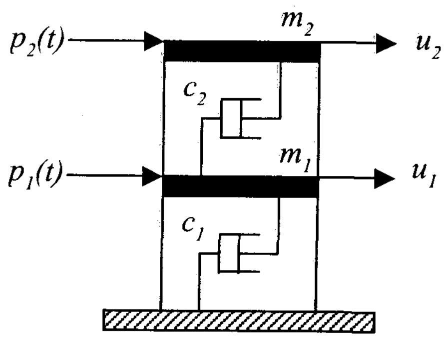
$$\ddot{u} + 2\xi\omega\dot{u} + \omega^2 u = 0 \tag{3.9}$$

$\xi = \dfrac{c}{2m\omega}$ เป็นอัตราส่วนความหน่วง (Damping ratio)

$\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ ความถี่ธรรมชาติ (Natural Frequency)

3.1.4 ระบบดีกรีแห่งความอิสระที่มากกว่าหนึ่ง (Multi-degree of freedom, MDOF)

ระบบโครงสร้างที่ประกอบด้วยจำนวนดีกรีแห่งความอิสระที่มากกว่าหนึ่ง ระบบจะมีความถูกต้องมากยิ่งขึ้น ในการวิเคราะห์ระบบ MDOF จะพิจารณาตัวอย่างโครงสร้างตึก 2 ชั้นที่มีแรงกระทำจากภายนอก $p_1(t)$ และ $p_2(t)$ กระทำในแต่ละชั้นตามลำดับ ซึ่งระบบดังกล่าวเป็นแบบ 2DOF โดยสมมุติให้ระบบคานและพื้นมีความแข็งมาก (Infinitely stiff) การขจัดอิสระที่เกิดขึ้นในทางด้านข้างเป็น u_1 และ u_2 ในแนวแกน x สามารถสร้างแบบจำลองทางพลศาสตร์ได้ดังภาพที่ 3.6



ภาพที่ 3.6 แบบจำลองระบบ 2DOF ที่มีแรงภายนอกมากระทำ

จากสมการที่ 3.1 สามารถเขียนสมการการเคลื่อนที่ของระบบ 2DOF ได้

$$m_1\ddot{u}_1 + f_{d1} + f_{s1} = p_1(t) \quad (3.10a)$$

$$m_2\ddot{u}_2 + f_{d2} + f_{s2} = p_2(t) \quad (3.10b)$$

จัดรูปเป็นเมตริกซ์จากสมการที่ 3.10a และ 3.10b เป็นสมการที่ 3.11

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} f_{d1} \\ f_{d2} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} f_{s1} \\ f_{s2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} p_1(t) \\ p_2(t) \end{Bmatrix} \quad (3.11)$$

สมมติพฤติกรรมของโครงสร้างเป็นแบบเส้นตรง (Linear system) แรงยึดหยุ่นต้านทาน f_S สามารถเขียนให้มีความสัมพันธ์ได้ดังสมการที่ 3.12

$$f_{S1} = k_1u_1 + k_2(u_1 - u_2) \quad (3.12a)$$

$$f_{S2} = -k_2u_1 + k_1u_2 \quad (3.12b)$$

จัดรูปเป็นเมตริกซ์จากสมการที่ 3.12 เป็นสมการ 3.13

$$\begin{Bmatrix} f_{S1} \\ f_{S2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \quad (3.13)$$

แรงหน่วง f_D จะมีความสัมพันธ์กับความเร็ว $\dot{u}_1$ และ $\dot{u}_2$ ดังนี้

$$f_{D1} = c_1\dot{u}_1 + c_2(\dot{u}_1 - \dot{u}_2) \tag{3.14a}$$

$$f_{D2} = -c_2\dot{u}_1 + c_1\dot{u}_2 \tag{3.14b}$$

จัดรูปเป็นเมตริกซ์จากสมการที่ 3.14a และ 3.14b เป็นสมการที่ 3.15

$$\begin{Bmatrix} f_{D1} \\ f_{D2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \end{Bmatrix} \tag{3.15}$$

ดังนั้นแทนสมการที่ 3.13 และ 3.15 ลงในสมการที่ 3.10

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} p_1(t) \\ p_2(t) \end{Bmatrix} \tag{3.16}$$

ซึ่งสามารถเขียนให้อยู่ในรูปทั่วไปของสมการสมดุลย์ทางพลศาสตร์ (Equation of motion) ได้ดังสมการที่ 3.17

$$\boldsymbol{M}\ddot{u} + \boldsymbol{C}\dot{u} + \boldsymbol{K}u = \boldsymbol{P(t)} \tag{3.17}$$

โดยที่ $\boldsymbol{M}$ คือ เมตริกซ์ของมวลซึ่งมีรูปทั่วไปดังสมการที่ 3.18

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & m_2 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & m_n \end{bmatrix} \tag{3.18}$$

$\boldsymbol{K}$ คือ เมตริกซ์ของสติฟเนสซึ่งมีรูปทั่วไปดังสมการที่ 3.19

$$\boldsymbol{K} = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 & \cdots & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 & \cdots & 0 \\ 0 & -k_3 & k_3 + k_4 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & k_n \end{bmatrix} \tag{3.19}$$

$\boldsymbol{C}$ คือ เมตริกซ์ของตัวหน่วงซึ่งมีรูปทั่วไปดังสมการที่ 3.20

$$\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 & 0 & \cdots & 0 \\ -c_2 & c_2 + c_3 & -c_3 & \cdots & 0 \\ 0 & -c_3 & c_3 + c_4 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & c_n \end{bmatrix} \tag{3.20}$$

u คือ เวกเตอร์ของการเคลื่อนที่ซึ่งมีรูปทั่วไปดังสมการที่ 3.22

$$u = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ u_n \end{Bmatrix} \tag{3.22}$$

$\boldsymbol{P}$ คือ เวกเตอร์ของแรงซึ่งมีรูปทั่วไปดังสมการที่ 3.23

$$\boldsymbol{P} = \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ p_n \end{Bmatrix} \tag{3.23}$$

3.2 การวิเคราะห์ค่าผลการตอบสนองของระบบโครงสร้างหลายดีกรีแห่งความอิสระ ด้วยวิธี Linear Acceleration method

การวิเคราะห์ค่าผลการตอบสนองของโครงสร้างที่ใช้ในงานศึกษาได้ทำการวิเคราะห์เชิงตัวเลขด้วยวิธี Step by Step Integration: Linear acceleration method ลำดับของการวิเคราะห์ระบบโครงสร้างที่มีความสัมพันธ์โดยกำหนดว่าโครงสร้างมีการวิเคราะห์แบบเชิงเส้น (Linear analyses) ซึ่งกำหนดว่าความแตกต่างของช่วงเวลา t_0 และ $t_0 + \Delta t$ ให้การเพิ่มขึ้นของระบบเป็น

$$\Delta f_I + \Delta f_D + \Delta f_S = \Delta P \tag{3.24}$$

โดย

$$\Delta f_I = f_{I1} - f_{I0} = m\Delta\ddot{u} \tag{3.25a}$$

$$\Delta f_D = f_{D1} - f_{D0} = c_0\Delta\dot{u} \tag{3.25b}$$

$$\Delta f_S = f_{S1} - f_{S0} = k_0\Delta u \tag{3.25c}$$

$$\Delta P = P_1 - P_0 \tag{3.25d}$$

ดังนั้นสามารถเขียนเป็นสมการการเคลื่อนที่ได้ว่า

$$m\Delta\ddot{u} + c_0\Delta\dot{u} + k_0\Delta u = \Delta P \tag{3.26}$$

การวิเคราะห์โดยวิธี Linear acceleration โดยใช้หลักการของวิธี Wilson θ โดยให้

$$\tau = \theta\, h \tag{3.27}$$

ค่า $\theta = 1.37 \approx 1.4$ โดยการวิเคราะห์หาค่าผลการตอบสนองสามารถลำดับการสร้างแบบจำลองได้ว่า กำหนดค่า Initial condition ที่เวลา $t_0 = 0$ และสามารถสร้างค่าความหน่วงและความสติฟเนสที่เวลาเริ่มต้นได้ว่า

$$u_0 = 0 \quad , \quad \dot{u}_0 = 0 \tag{3.28}$$

เมื่อกำหนดค่าเริ่มต้นดังสมการที่ 3.28 สามารถหาเมตริกซ์ของความเร่งและเมตริกซ์ของสติฟเนสเริ่มต้น โดยหาค่าความเร่งเริ่มต้นจากสมการการเคลื่อนที่ได้

$$\ddot{u}_0 = \frac{1}{m}[p_0 - f_{D0} - f_{S0}] \tag{3.29}$$

คำนวณหาค่า $\hat{\Delta}u$ จากสมการที่ โดยหาค่า $\hat{k}$ และ $\hat{\Delta}p$ จากสมการที่

$$\hat{k}\,\hat{\Delta}u = \hat{\Delta}P \tag{3.30}$$

เมื่อ
$$\hat{k} = k_0 + \frac{3}{\tau} c_0 + \frac{6}{\tau^2} m \tag{3.31}$$

$$\hat{\Delta}p = \Delta p + c_0 [3\dot{u}_0 + \frac{\tau}{2}\ddot{u}_0] + m[\frac{6}{\tau}\dot{u}_0 + 3\ddot{u}_0] \tag{3.32}$$

และ

$$\hat{\Delta}\ddot{u} = \hat{\Delta}u \frac{6}{\tau^2} - \dot{u}\frac{6}{\tau} - 3\ddot{u}_0 \tag{3.33}$$

$$\Delta\ddot{u} = \frac{1}{\Theta}\hat{\Delta}\ddot{u} \tag{3.34}$$

เมื่อทำการคำนวณ ค่าผลต่างความเร่งได้เรียบร้อยแล้วทำการคำนวณเทียบกลับด้วยค่าลำดับเวลาจริง โดยการวิเคราะห์ด้วยสมการที่ 3.35 และหาค่าผลต่างการเคลื่อนที่ได้จากสมการที่ 3.36

$$\Delta\dot{u} = \ddot{u}_0 \Delta t + \Delta\ddot{u}\frac{\Delta t}{2} \tag{3.35}$$

$$\Delta u = \dot{u}_0 \Delta t + \ddot{u}_0 \frac{\Delta t^2}{2} + \Delta\ddot{u}\frac{\Delta t^2}{6} \tag{3.36}$$

และนำค่าผลต่างจากความเร่งและการเคลื่อนที่กลับมารวมกับค่าเดิมแล้วกลับไปคำนวณต่อเพื่อหาค่าความเร่งและการเคลื่อนที่ที่เวลา Δt ต่อไปได้

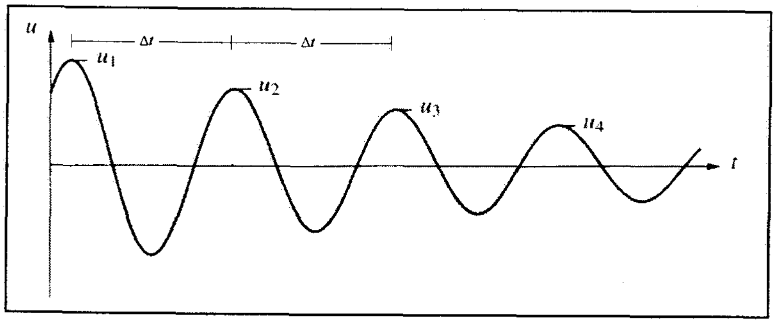
$$u_1 = \Delta u + u_0 \tag{3.37}$$

$$\dot{u}_1 = \dot{u}_0 + \Delta\dot{u} \tag{3.38}$$

3.3 การวิเคราะห์หาค่าความถี่และค่าอัตราส่วนความหน่วงของโครงสร้างระบบ SDOF

การวิเคราะห์หาค่าพารามิเตอร์ต่างๆ ของโครงสร้างระบบ SDOF ที่มีผลการตอบสนองของโครงสร้างเป็นแบบการสั่นไหวแบบอิสระแบบ Underdamped system ทำการพิจารณาการวิเคราะห์ด้วยวิธี Logarithmic decrement, δ เพื่อหาค่าอัตราส่วนความหน่วงของโครงสร้างโดยจัดสมการการวิเคราะห์ด้วยค่าขนาดของผลการตอบสนองสูงสุดของโครงสร้างที่ระดับ n และ $n+1$ ทำการวิเคราะห์หาค่าพารามิเตอร์รูปแบบการวิเคราะห์แสดงดังภาพที่ 3.7 โดยสมการการวิเคราะห์เป็นสมการที่ 3.39

$$\delta = \ln(\frac{u_n}{u_{n+1}}) = \frac{2\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \qquad (3.39)$$



ภาพที่ 3.7 การวิเคราะห์หาค่าอัตราส่วนความหน่วงด้วยวิธี Logarithmic decrement

เมื่อโครงสร้างมีขนาดของอัตราส่วนความหน่วงต่ำสามารถจัดรูปสมการที่ 3.39 ให้ได้โดยทำการประมาณค่าใหม่ได้

$$\delta = 2\pi\xi \qquad (3.40)$$

จากสมการที่ 3.39 ได้ว่า

$$\xi = \frac{1}{2\pi}\ln(\frac{u_n}{u_{n+1}}) \qquad (3.40)$$

สำหรับการหาค่าความถี่ธรรมชาติของโครงสร้างทำการวิเคราะห์ได้จากผลต่างของยอดของค่าผลการตอบสนองที่มากที่สุดนำมาหาค่าผลต่างของเวลา ในแต่ละยอดจะได้เป็นค่าของคาบเวลาของผลการตอบสนองนั้นๆ และหาค่าความถี่ธรรมชาติได้ดังสมการที่ 3.7(repeat)

$$T = \Delta t \qquad (3.41)$$

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega_n}{2\pi} \qquad (3.7,\ \text{repeat})$$