ภาคผนวก ก.

1.1ทฤษฎีความคาดหวังแบบมีเงื่อนไข

ทฤษฎี1.7[1] ให้ค่าคาด หวังของตัวแปรสุ่ม U คือ $E(U) = E[E(U/H_j)]$ โดยที่ H_j $(j=1,2,3,...,n)$ เป็นเซตที่แยกจากกันโดยเด็ดขาด ซึ่ง $Pr(H_k H_j) = 0$ และ (U/H_j) เป็นการแจกแจงแบบมีเงื่อนไขของ U เมื่อกำหนด H_j

พิสูจน์

$$E(U) = \Sigma u_i Pr(U=u_i)$$
$$= \Sigma u_i \Sigma Pr(U=u_j, H=H_j)$$
$$= \Sigma u_i \Sigma Pr(U=u_i/H_j)Pr(H_j)$$
$$= \Sigma Pr(H_j)\Sigma u_i Pr(U=u_i/H_j)$$
$$= \Sigma Pr(H_j)E(U/H_j)$$

ให้ $E(U/H_j) = E_2(U)$

ดังนั้น
$$E(U) = \Sigma Pr(H_j)E_2(U)$$
$$= E[E_2(U)]$$
$$= E_1[E_2(U)]$$

โดยที่ E_1 แทนค่าคาดหวังของH_j $(j=1,2,...,n)$

---

[1] Raj,D,Sampling Theory,(New York:McGraw-Hill(1968)),p.12-13

1.2ทฤษฎีความแปรปรวนแบบมีเงื่อนไข

ทฤษฎี 1.8 [2] $Cov(U,W) = E_1C_2(U,W) + C_1(E_2U,E_2W)$

โดยที่ $E(U/H_J) = E_2(U)$ และH_J เป็น covariance แบบมีเงื่อนไขของ U และ W คือ $C_2(U,W) = E_2(U,W) - E_2(U)E_2(W)$

พิสูจน์ ให้ $E_2(U) = x$ และ $E_2(W) = y$

$$
\begin{aligned}
Cov(U,W) &= E(UW) - E(U)E(W) \\
&= E_1E_2(UW) - E_1[E_2(U)]E_1[E_2(W)] \\
&= E_1E_2(UW) - E_1(x)E_1(y) \\
&= E_1E_2(UW) - xy + E_1(xy) - E_1(x)E_1(y) \\
&= E_1[E_2(UW) - xy] + [E_1(xy)E_1(x)E_1(y)] \\
&= E_1C_2(U,W) + C_1(E_2U,E_2W)
\end{aligned}
$$

บทแทรก

$$
\begin{aligned}
Cov(U,U) &= E_1C_2(U,U) + C_1(E_2U,E_2U) \\
\text{ดังนั้น}V(U) &= E_1V_2(U) + V_1E_2(U)
\end{aligned}
$$

---

[2] Ibid,P.14

1.3 วิธีประมาณค่าความแปรปรวนเมื่อเลือกตัวอย่างโดยใช้ความน่าจะเป็นของการเลือกไม่เท่ากันแบบไม่คืนที่[3]

ให้ $L(s) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i c_i y_i$, c_i เป็นค่าคงที่ ----(1)

โดยที่ $\alpha_i = 1$, y_i อยู่ในตัวอย่าง $(i=1,2,\ldots N)$

$= 0$, อื่นๆ

และ $\alpha_{ij} = 1$, y_i, y_j อยู่ในตัวอย่าง $(i \neq j=1,2,3,\ldots,N)$

$= 0$, อื่นๆ

ซึ่งมี π_i เป็นความน่าจะเป็นที่ y_i อยู่ในตัวอย่าง

π_{ij} เป็นความน่าจะเป็นที่ y_i, y_j อยู่ในตัวอย่าง

$V(\alpha_i) = \pi_i(1-\pi_i)$ และ $Cov(\alpha_i,\alpha_j) = \pi_{ij} - \pi_i\pi_j$

take Expectation บน----(1);

$$E[L(s)] = \sum_{i=1}^{N} c_i y_i E(\alpha_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \pi_i c_i y_i \qquad \text{-----(2)}$$

ให้ $c_i = \frac{1}{\pi_i}$ ทำให้----(2) ; $E[L(s)] = \sum_{i=1}^{N} y_i$

ดังนั้น $L(s)$ เป็นตัวประมาณค่าที่ไม่เอนเอียงของยอดรวมประชากร

$$\hat{L}(s) = \sum_{i=1}^{N} \frac{\alpha_i y_i}{\pi_i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{y_i}{\pi_i}$$

และ $$V[\hat{L}(s)] = \sum_{i=1}^{N} \frac{y_i^2 V(\alpha_i)}{\pi_i^2} + 2 \sum\sum_{i \neq j}^{NN} \frac{y_i y_j}{\pi_i \pi_j} Cov(\alpha_i,\alpha_j)$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \frac{y_i^2(1-\pi_i)}{\pi_i} + 2 \sum\sum_{i \neq j}^{NN} y_i y_j \frac{(\pi_{ij}-\pi_i\pi_j)}{\pi_i \pi_j} \qquad \text{----(3)}$$

----

[3] Ibid, P.52

1.4วิธีหาตัวประมาณค่าของV[L(s)][4]

ให้ f(y) เป็นฟังก์ชั่นของ y และมี

$$L_{1(s)} = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i c_i f_i(y_i) = \sum_{i=1}^{N} c_i f_i(y_i)$$

$$L_2(s) = \sum_{i \neq j}^{N} \alpha_{ij} c_{ij} f(y_i) f(y_j)$$

$$= \sum_{i \neq j}^{N} c_{ij} f(y_i) f(y_j)$$

$$E[L_1(s)] = \sum_{i=1}^{N} \pi_i c_i f(y_i)$$

$$E[L_2(s)] = \sum_{i \neq j}^{N} \pi_{ij} c_i c_j f(y_i) f(y_j)$$

จาก--(3); $\hat{V}[\hat{L}(s)] = \sum_{i=1}^{n} \frac{y_i^2(1-\pi_i)}{\pi_i^2} + 2 \sum\sum_{i \neq j}^{n\,n} \frac{\pi_{ij}-\pi_i\pi_j}{\pi_{ij}} \frac{y_i y_j}{\pi_i \pi_j}$

---

[4] Ibid, P.53

1.5การใช้ประโยชน์จากความสัมพันธ์ระหว่างความน่าจะเป็นที่หน่วยที่iซึ่งอยู่ในตัวอย่าง กับความน่าจะเป็นที่หน่วยที่ i,j อยู่ในตัวอย่าง($i \neq j=1,2,\ldots,N$)

1.ต้องการแสดงว่า $\sum_{i=1}^{N} \pi_i = n$

$$\sum_{i \neq j=1}^{N} \pi_{ij} = (n-1)\pi_i$$

พิสูจน์ ให้ y_i เป็นค่าของสิ่งที่ต้องการศึกษาในหน่วยที่ i จากประชากรขนาด N ($i=1,2,\ldots,N$)

n เป็นขนาดตัวอย่างซึ่งเกิดจากการเลือกตัวอย่างโดยไม่ใส่คืน

$\alpha_i = 1$, y_i อยู่ในตัวอย่าง , $i = 1,2,\ldots,N$

$= 0$, อื่นๆ

$\alpha_i\alpha_j = 1$, y_i, y_j อยู่ในตัวอย่าง, $i \neq j = 1,2,\ldots,N$

$= 0$, อื่นๆ

π_i เป็นความน่าจะเป็นที่ y_i อยู่ในตัวอย่าง

π_{ij} เป็นความน่าจะเป็นที่ y_i, y_j อยู่ในตัวอย่าง

พิจารณา $\sum_{i=1}^{N} \alpha_i = \alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n = n$

และ $\alpha_i = 1$ เมื่อ y_i อยู่ในตัวอย่าง

take expectation;

$$\sum_{i=1}^{N} E(\alpha_i) = n$$

$$\sum_{i=1}^{N} 1.Pr(\alpha_i=1) = n$$

$$\sum_{i=1}^{N} \pi_i = n$$

ในทำนองเดียวกันจะได้ว่า

$$\sum_{i\neq j=1}^{N} \alpha_i \alpha_j = n(n-1)$$

take expectation;

$$\sum_{i\neq j=1}^{N} E(\alpha_i \alpha_j) = n(n-1)$$

พิจารณา $\sum_{i\neq j=1}^{N} E(\alpha_i \alpha_j) = \sum_{i\neq j=1}^{N} 1.Pr(\alpha_i=1, \alpha_j=1)$

$$= \sum_{i\neq j=1}^{N} Pr(\alpha_i=1).Pr(\alpha_j=1/\alpha_i=1)$$

$$= \sum_{i\neq j=1}^{N} \pi_i.Pr(\alpha_j=1/\alpha_i=1)$$

$$= \pi_i \sum_{i\neq j=1}^{N} Pr(\alpha_j=1/\alpha_i=1)$$

$$= (n-1)\pi_i$$

$$\sum_{i\neq j=1}^{N} \pi_{ij} = (n-1)\pi_i$$

พิจารณา $\sum_{i=1}^{N} \alpha_i = \alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n = n$

เนื่องจาก $\alpha_i = 1$ เมื่อ y_i อยู่ในตัวอย่าง

ถ้าให้ y_1 อยู่ในตัวอย่าง แล้วจะได้ว่า $\alpha_1 = 1$

$$\sum_{i=1}^{N} \alpha_i = \alpha_1+(\alpha_2+\alpha_3+\ldots+\alpha_n) = n$$

$$= \alpha_1 + \sum_{j \neq 1}^{N} \alpha_j$$

take expectation;

$$E(\alpha_1) + \sum_{i=1}^{N} E(\alpha_j) = n$$

$$\P_1 + \sum_{j \neq 1}^{N} \P_j = n$$

$$\sum_{j \neq 1}^{N} \P_j = n - \P_1$$

ในทำนองเดียวกันจะได้ว่า

$$\sum_{i \neq j = 1}^{N} \P_j = n - \P_i$$

2.ต้องการแสดงว่า $\sum_{i<j}^{N}\left[(\pi_i\pi_j-\pi_{ij})\left(\frac{y_i^2}{\pi_i^2}-\frac{y_j^2}{\pi_j^2}\right)\right]=\sum_{i=1}^{N}\frac{y_i^2(1-\pi_i)}{\pi_i}$

<u>พิสูจน์</u>

$$\sum_{i<j}^{N}\left[\left(\pi_i\pi_j-\pi_{ij}\right)\left(\frac{y_i^2}{\pi_i^2}-\frac{y_j^2}{\pi_j^2}\right)\right]=\sum_{i=1}^{N}\sum_{i\neq j}^{N}\left[\left(\pi_i\pi_j-\pi_{ij}\right)\frac{y_i^2}{\pi_i^2}\right]$$

$$=\sum_{i=1}^{N}\sum_{i\neq j}^{N}\pi_i\pi_j\frac{y_i^2}{\pi_i^2}-\sum_{i=1}^{N}\sum_{i\neq j}^{N}\pi_{ij}\frac{y_i^2}{\pi_i^2}$$

$$=\sum_{i=1}^{N}\frac{y_i^2}{\pi_i}\sum_{i\neq j}^{N}\pi_j-\sum_{i=1}^{N}\frac{y_i^2}{\pi_i^2}\sum_{i\neq j}^{N}\pi_{ij}$$

$$=\sum_{i=1}^{N}\frac{y_i^2(n-\pi_i)}{\pi_i}-\sum_{i=1}^{N}\frac{y_i^2(n-1)\pi_i}{\pi_i^2}$$

$$=\sum_{i=1}^{N}\frac{y_i^2(1-\pi_i)}{\pi_i}$$