บทที่ 2

แนวคิดของทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง

แนวความคิด ทฤษฎีและวิธีการกระจาย GDP รายปีให้เป็นรายเดือน

ขนิษฐา มีศุข และประพันธ์ สายสงเคราะห์ ได้เสนอวิธีการประมาณข้อมูลผลิตภัณฑ์มวลรวมประชาชาติรายเดือน หรือรายไตรมาสจากข้อมูลรายปี โดยอาศัยตัวแปรทางเศรษฐกิจ (ที่สามารถรวบรวมได้ ณ ความถี่ระยะสั้น) ที่เกี่ยวข้อง ซึ่งกลุ่มผู้วิจัยได้แสดงให้เห็นว่าค่าที่ประมาณได้มีคุณสมบัติทางสถิติ เป็น Best Linear Unbiased Estimator (BLUE) และในขณะเดียวกัน ได้ค่าประมาณที่ทำให้ Quadratic Loss Function (QLF) มีค่าน้อยที่สุดด้วย

สมมติว่า $\underline{Y}$ เป็นข้อมูล GDP รายปีจำนวน m ปี เราสามารถเขียนได้ในรูป

$$\underline{Y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_m \end{bmatrix}$$

เมื่อ y_i คือข้อมูลอนุกรมรายปี ปีที่ i $(i = 1,2,\ldots,m)$

Z เป็นเมตริกซ์ของอนุกรมเวลารายเดือน จำนวนตัวแปรของอนุกรมใน Z ขึ้นอยู่กับวัตถุประสงค์ของการวิจัย สมมติว่ามี q ตัว นั่นคือ Z เป็นตัวแปรที่นำมาใช้อธิบาย $\underline{Y}$ ดังนี้

$$Z = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} & \cdots & Z_{1j} & \cdots & Z_{1q} \\ Z_{21} & Z_{22} & \cdots & Z_{2j} & \cdots & Z_{2q} \\ \cdot & \cdot & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & & \cdot \\ Z_{12.1} & Z_{12.2} & \cdots & Z_{12.j} & \cdots & Z_{12.q} \\ \cdot & \cdot & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & & \cdot \\ Z_{12m.1} & Z_{12m.2} & \cdots & Z_{12m.j} & \cdots & Z_{12m.q} \end{bmatrix}$$

$= [\underline{Z}_1\ \underline{Z}_2 \cdots \underline{Z}_j \cdots \underline{Z}_q]$, มี q ตัวแปร

$$\underline{Z}_j = \begin{bmatrix} Z_{1j} \\ Z_{2j} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ Z_{12m.j} \end{bmatrix}$$, ตัวหนึ่งมีความยาว 12m คาบเวลา เมื่อ m เป็นข้อมูลจำนวน m ปี

ให้ $X_{ij} = \sum_{p=12i-11}^{12i} Z_{pj}$, ข้อมูลปีที่ i ของตัวแปรที่ j

ดังนั้นเราสามารถเขียนเมตริกซ์ Z ใหม่ได้ดังนี้

$$X = B'Z = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} & \cdots & X_{1q} \\ X_{21} & X_{22} & \cdots & X_{2q} \\ \cdot & \cdot & & \\ \cdot & \cdot & & \\ \cdot & \cdot & & \\ X_{m.1} & X_{m.2} & \cdots & X_{m.q} \end{bmatrix}$$, เมื่อ B เป็นเมตริกซ์ที่มีคุณสมบัติตามที่กำหนดในหน้าที่ 10

ซึ่งต่อไปนี้จะเขียน X แทนเมตริกซ์ Z

$$X = [\underline{X}_1 \; \underline{X}_2 \; \ldots \; \underline{X}_j \; \ldots \; \underline{X}_q]$$

โดยที่ $\underline{X}_j = \begin{bmatrix} X_{1,j} \\ X_{2,j} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ X_{m,j} \end{bmatrix}$

ขนิษฐา มีศุข และคณะได้เสนอว่า เมตริกซ์ของตัวแปร Z ที่เก็บเป็นข้อมูลรายเดือนควรมีคุณสมบัติที่สามารถอธิบายค่าตัวแปรตาม Y หรือ GDP รายปี จึงจะใช้วิธีการกระจายให้เป็นรายเดือนได้ ตามขั้นตอนต่อไปนี้

1. ศึกษาระดับความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปร Y กับ X ว่าเป็นไปตามรูปแบบ

$$\underline{Y} = X\underline{\beta} + \underline{e}$$

หรือไม่

2. ดำเนินการประมาณค่า $\hat{\underline{\beta}}$ โดยใช้วิธีกำลังสองต่ำสุด (ordinary least square method)

$$\hat{\underline{\beta}} = (X'X)^{-1}X'Y$$

3. ดำเนินการตรวจสอบคุณสมบัติของ e_i ว่าเป็น NID$(0,\sigma^2)$ หรือไม่ หากไม่เป็นเช่น มีค่าความแปรปรวนไม่คงที่ ก็จะปรับวิธีการประมาณค่าใหม่โดยใช้วิธีถ่วงน้ำหนัก (generalized least square)

4. ตรวจสอบหาตัวแปรอิสระ X ที่เหมาะสมโดย 3 วิธีการ คือ stepwise method, enter method และ เมตริกซ์สหสัมพันธ์ จากนั้นให้ดำเนินการตัดสินคัดเลือกตัวแปรอิสระ X โดยวิธีเปรียบเทียบค่า R^2 และเลือก X จากวิธีที่มีค่า R^2 สูงสุด

5. เมื่อได้ตัวแปรอิสระ X ที่เหมาะสมแล้วจึงดำเนินการหาค่าประมาณของ ส.ป.ส. โดยวิธี ordinary least square

6. ตรวจสอบค่าสถิติ Durbin Watson เพื่อหาแนวทางแก้ปัญหา serial correlation ก่อนจะนำค่าประมาณสัมประสิทธิ์ไปใช้ในการกระจายค่า Y ต่อไปดังนี้

6.1 ให้ M เป็นค่ากระจาย GDP รายปี Y ดังนี้

$$M = \left[\begin{array}{c} M_1 \\ M_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ M_{12} \\ \hline M_{13} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ M_{24} \\ \hline \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \hline M_{11m+1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ M_{12m} \end{array}\right] \begin{array}{l} \left.\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}\right\} \text{ค่ากระจายของ } Y_1 \\ \left.\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}\right\} \text{ค่ากระจายของ } Y_2 \\ \begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array} \\ \left.\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}\right\} \text{ค่ากระจาย ของ } Y_m \end{array}$$

ให้ B เป็นเมตริกซ์ขนาด 12m x m (m เป็นจำนวนปี) ซึ่งมีคุณสมบัติคือ

$$B = \begin{bmatrix} \underline{1} & \underline{0} & \underline{0} & \cdots & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{1} & \underline{0} & \cdots & \underline{0} \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & & \underline{1} \end{bmatrix}_{12m \times m}$$

$$\underline{1}' = [1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1]$$

$$\underline{0}' = [0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0]$$

ทั้ง $\underline{1}$ และ $\underline{0}$ มีสมาชิกอยู่ 12 ค่า (ถ้าทำการกระจายในแบบให้เป็นรายเดือน แต่ถ้าเป็นรายไตรมาสจะมีสมาชิกอยู่จำนวน 4 ค่า ซึ่งเท่ากับจำนวนคาบเวลาในหนึ่งปีนั่นเอง)

นั่นคือ

$$\underline{Y} = B'\underline{M}$$

$\underline{M}$ ควรมีคุณสมบัติดังนี้คือ

(1) มีความสัมพันธ์เชิงเส้นกับ Z

(2) ผลรวมใน 12 เดือนของเวคเตอร์ $\underline{M}_i$ ต้องเท่ากับค่า GDP รายปี, Y_i (i เป็น subsccrip แทนปีที่ i)

คุณสมบัติทั้งสองข้อแสดงว่า $\underline{M}$ สามารถประมาณได้จาก Z โดยการถดถอยพหุ

$$\underline{M} = Z\underline{\beta}^{*} + \underline{u} \qquad (1)$$

โดยที่ $\underline{\beta}^{*} = [\ \beta_1 \ \beta_2 \ . \ . \ . \ \beta_q\ ]'$ เป็นเวคเตอร์สัมประสิทธิ์ของตัวแปรทั้งหมดในเมตริกซ์ Z, $\underline{u}$ เป็นเวคเตอร์สุ่มซึ่งสมมติฐานดังต่อไปนี้

$$\text{Mean} : \ E(\underline{u}) = 0 \qquad (2)$$

$$\text{Variance} : E(\underline{u}\ \underline{u}') = V = \sigma^2 I \qquad (3)$$

ความสัมพันธ์ระหว่าง $\underline{Y}$ กับ $\underline{M}$ สามารถเขียนได้เป็น

$$\underline{Y} = B'\underline{M} = B'Z\underline{\beta} + B'\underline{u}$$

แทนค่า $\underline{M}$ จากสมการ (1) จะได้

$$\underline{Y} = B'(Z\beta^{*} + \underline{u}) \qquad (4)$$

ซึ่งเมตริกซ์ B ถูกกำหนดขึ้นเพื่อที่ทำให้ผลบวก 12 ค่า (เดือน) ของ เวคเตอร์ $\underline{M}_i$ มีค่าเท่ากับ หนึ่งค่า (ปี) ของ Y_i (subscrip i แทนปีที่ i)

6.2 จากนิยามของ B จะได้

X = B'Z (ค่าเทอมแรกทางขวามือซึ่งก็คือค่าผลรวมของ Z ให้เป็นข้อมูลรายปี) ที่จะนำไปใช้ในสมการถดถอยเชิงเส้นในรูปแบบ

$$\underline{Y} = X\underline{\beta} + \underline{e} \qquad (5)$$

7. ดำเนินการกระจายค่า $\underline{Y}$ ให้เป็นรายเดือน

7.1 ให้ $\underline{\beta}^{\hat{}} = (X'X)^{-1}X'\underline{Y}$ (เป็นค่าสัมประสิทธิ์ของสมการถดถอยเชิงเส้นตรงที่ได้จากการคัดเลือกตัวแปร X ตามขั้นตอนที่ 4

7.2 ให้ดำเนินการหาค่า

$$\underline{Y}^{\hat{}} = X\underline{\beta}^{\hat{}}$$

7.3 ภายใต้ข้อสมมติที่ว่า ถ้า X มีความสัมพันธ์เชิงเส้นตรงกับ $\underline{Y}$ แล้ว Z ก็จะมีความสัมพันธ์เชิงเส้นตรงกับ $\underline{M}$ เช่นกัน ดังนี้ (กล่าวไว้แล้วในสมการ 1 หน้า 10)

$$\underline{M} = Z\underline{\beta}^{*} + \underline{u} \qquad (6)$$

เมื่อพิจารณาจากรูปแบบทั้งสอง จากสมการ (5) และ (6)

$$\underline{Y} = X\underline{\beta} + \underline{e}$$
$$\underline{M} = Z\underline{\beta}^{*} + \underline{u}$$

โดยที่ $\underline{Y} = B'\underline{M}$ ทำให้สรุปได้ว่า

$\underline{Y} = B'(Z\underline{\beta}^{*}) + B'\underline{u}$ (แทนค่า $\underline{M}$ ลงไป)

$= (B'Z)\underline{\beta}^{*} + B'\underline{u}$ เมื่อนำไปเทียบกับ $\underline{Y} = X\underline{\beta} + \underline{e}$

โดย X กับ Z มีความสัมพันธ์กันโดย

$X_{mxq} = B'_{mx12m}Z_{12mxq}$ (ซึ่งที่แท้แล้วก็คือค่าผลบวกข้อมูลรายเดือนในเมตริกซ์ Z_{12mxq} ให้เป็นเมตริกซ์ X_{mxq})

จะได้

$$\underline{\beta} = \underline{\beta}^{*} \quad \text{และ} \quad \underline{e} = B'\underline{u}$$

นั่นคือ $\underline{\beta}^{\wedge}$ ที่ได้จากการประมาณค่า

$$\underline{Y} = X\underline{\beta} + \underline{e}$$

จะมีค่าเท่ากับ $\underline{\beta}^{*}$

7.4 ดังนั้นดำเนินการหาค่า

$$\begin{aligned}
\underline{M}^{\wedge} &= Z\underline{\beta}^{\wedge} \\
\underline{M} &= \underline{M}^{\wedge} + \underline{u}^{\wedge} \\
&= Z\underline{\beta}^{\wedge} + \underline{u}^{\wedge} \\
&= Z\underline{\beta}^{\wedge} + \frac{\underline{1}}{12} B(Y - X\underline{\beta}^{\wedge}) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(7)
\end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ M_{12} \\ M_{13} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ M_{12m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} & \cdots & Z_{1q} \\ Z_{21} & Z_{22} & \cdots & Z_{2q} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ Z_{12.1} & Z_{12.2} & \cdots & Z_{12.q} \\ Z_{13.1} & Z_{13.2} & \cdots & Z_{13.q} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ Z_{12m.1} & Z_{12m.2} & \cdots & Z_{12m.q} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \beta_q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u_{12} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u_{12m} \end{bmatrix}$$

จะเห็นได้ว่าเราต้องประมาณค่า $\underline{u}\hat{}$ โดยอาศัย $\underline{e}\hat{}$ และเราแสดงได้ว่า

$$\underline{u}\hat{} = VB(B'VB)^{-1}[\underline{Y} - B'Z\underline{\beta}\hat{}]$$

(เมื่อ V เป็น Variance-Covariance Matrix จากสมการ (3) หน้า 11)

และเมื่อให้ $V = \sigma^2 I$ จะได้

$$\underline{u}\hat{} = \sigma^2 IB(B'\sigma^2 IB)^{-1}\underline{e}\hat{}$$

$$= \sigma^2 \left(\frac{1}{12\sigma^2}\right) B\underline{e}\hat{} = \frac{1}{12} B\underline{e}\hat{} \quad .... (8)$$

ซึ่งสามารถเขียนได้เป็น

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u_{12} \\ u_{13} \\ u_{14} \\ u_{15} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u_{12m} \end{bmatrix} = \frac{1}{12} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ e_1 \\ \hline \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \hline e_m \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ e_m \end{bmatrix}$$

ดังนั้นแสดงว่า ค่าส่วนเหลือเมื่อกระจายข้อมูลเป็นรายเดือนแล้ว สำหรับแต่ละเดือนในปีที่ i มีค่าเท่ากันเท่ากับค่าคงที่ u_i จะมีค่าเป็น

$$u_i = \frac{1}{12} e_i$$

เมื่อได้ปรับปรุงโครงสร้าง var-cov. matrix ของ $\underline{e}$ ให้เป็น $\sigma^2 I$ แล้วซึ่งส่งผลให้โครงสร้าง var-cov matrix ของ $\underline{u}$ เป็น $\sigma^2 I$ เช่นกัน แตกต่างกันที่ $\underline{e}$ และ $\underline{u}$ เป็นเวคเตอร์ที่มีจำนวนเป็นรายปีและรายเดือนตามลำดับ

กล่าวโดยสรุป จะเห็นว่า หลักการกระจายค่า GDP รายปี โดยอาศัยเมตริกซ์ของตัวแปร Z บันทึกเป็นรายเดือน แบ่งเป็น 2 ส่วนหลักคือ

1. ประมาณค่า $\underline{M}$ หรือ $\underline{M}\hat{}$ จากสมการ

$$\underline{M}\hat{} = Z\underline{\beta}\hat{}$$

2. ประมาณค่า $\underline{u}\hat{}$ โดยอาศัย $\underline{e}\hat{}$ ซึ่ง

$$\underline{u}\hat{} = \frac{1}{12} B\underline{e}\hat{}$$

$$\underline{e}\hat{} = \underline{Y} - X\underline{\beta}\hat{} \quad \text{และ} \quad B'u\hat{} = e\hat{}$$

โดย B จะทำหน้าที่เป็นเมตริกซ์ที่แบ่งกระจจยค่าคลาดเคลื่อน $e_i\hat{}$ ในแต่ละปี ออกเป็นส่วนเหลือเฉลี่ยเท่าๆ กันเท่ากับ 12 ค่าสำหรับ $\underline{u}\hat{}$ รายเดือน

3. จากนั้นคำนวณค่ากระจายของ Y จาก

$$M = M\hat{} + u\hat{}$$